«Номерные» методички идут в основном программе семинаров, лекционного семинара в них нет.
Эта тема – исключение. Я призываю всех заботать классические ортогональные полиномы прямо сейчас, а не ждать экзамена. Во-первых, чтобы не хлопать глазами при словах «присоединённая функция Лежандра», когда мы будем работать в сферической СК.
Во-вторых (и это важнее), классические ортогональные полнномы у вас будут мелькать на атомке, так что заботайте их сейчас, чтобы не хлопать глазами ещё и на атомке.
В-третьих, эта тема достаточна приятна. Многие считают её самой приятной во всём ММФ.
В-четвёртых, то, что это лекционный материал, не значит, что будет скучно. Я постарался разжевать всё максимально понятно, с шутками-прибаутками, как вы любите.

Классические ортогональные полиномы (КОП). Или КлОП. Можете называть и так, и так. Я буду называть КОП, потому что так и короче, и можно анекдот рассказать:
- Что общего между американским негром и студентом ФФ?
- И тот, и тот боится копов.

После всех этих сложных новых функций (Бесселя, Неймана) с неприятным комплексным привкусом (особенно если вы смотрели лекции Боголюбова) хочется чего-то попроще. Например, старых добрых полиномов.
Обозначать такие полиномы надо будет маленькой буквой «p», потому что большой мы будем обозначать полиномы Лежандра.
Систему классических ортогональных полиномов (СКОП) будем обозначать в фигурных скобках:

$$\{p_n(x)\}$$

Эта система состоит из счётного числа полиномов ВСЕХ СТЕПЕНЕЙ по одному каждой степени.
Т.е. там присутствует:
Одна константа
Одна линейная функция
Одна квадратичная функция
Один кубический многочлен
И так далее.

Обозначать мы их будем $p_n(x)$, где n – степень многочлена.
Но, как вы понимаете, если напихать туда по рандомному многочлену каждой степени, мы ничего интересного не получим. Чтобы получить трускоп, должно выполняться вот такое интересное условие:

$$\int_a^b p_m(x)p_l(x)\rho(x)dx = 0,\ m \neq l$$

ЭТО УСЛОВИЕ – ОСНОВА СКОП! ЗАПОМНИТЬ!!!
Чтобы вы запомнили его навсегда, расскажу вам грустную историю. Многочлены из СКОПы живут в страшной антиутопии, где, дабы воспрепятствовать распространению антиправительственных мыслей, запрещены любые контакты друг с другом. И как только многочлен m-ной степени назначает многочлену l-той степени встречу под интегралом, к ним подходит жандарм ρ(x) и выдаёт итог встречи ноль :(
И только если многочлен решит клонировать себя и подговорить под интегралом в присутствии жандарма ρ(x), жандарм разрешит ненулевой результат.

Числа a и b выбираются один раз на всю систему. Они также могут быть равны – или + бесконечности (оба или одно из них), в этом случае интеграл будет несобственный.
Функция ρ(x), наш жандарм, тоже не абы какая, но пока мы в это углубляться не будем. Считайте, что она тоже нам дана, и из необходимых условий мы потребуем то, что она на [a..b] знакопостоянна и не тождественный нуль. Она называется весом!

Возникает естественный вопрос: а можно ли построить коммунизм… ой, систему КОП (СКОП)? Это ж надо, чтобы занулялся интеграл от каждой пары многочленов из СКОП! Ответ: можно, и далее мы её построим. А пока что поверим, что она есть.

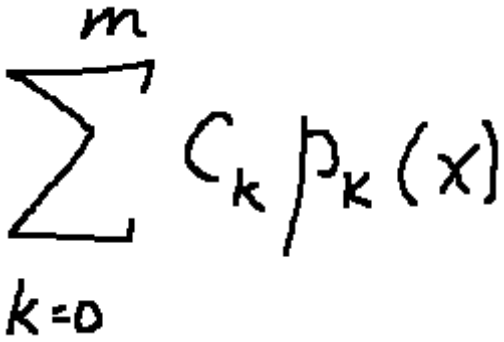
Замечание: бессмысленно говорить, что какой-то полином сам по себе отдельно классичен и ортогонален. Все прелести будут, если волки соберутся в стаю, а полиномы – в систему.

Ещё замечание: вот это «антиутопическое» условие

$$\int_a^b p_m(x)p_l(x)\rho(x)dx = 0,\ m \neq l$$

у Боголюбова называется свойством.
Это чудовищная ошибка. Это входит в определение СКОП, его не нужно доказывать! А свойства будут ниже, и их мы как раз будем доказывать.

Свойства, которые нужно доказывать:
0) Его не упомянул Боголюбов, а меж тем оно очень важно.
Любой многочлен (и не входящий в эту систему КОП в том числе) k-той степени можно представить в виде



Линейной комбинации многочленов из СКОП степени не больше k.
Здесь нам свойство ортогональности не потребуется, потребуется только логика. Покажем на примере:
Пусть $p_0(x)=1$
$p_1(x)=x/2-1$
$p_2(x)=2x^2-2x+3$
А нам нужно представить в виде линейной комбинации x^2+x+1.
Сначала подгоняем коэффициент при старшем КОП - $p_2(x)$. Он должен быть ½. Имеем:
$x^2+x+1=1/2(2x^2-2x+3)+?= x^2-x+3/2+?$ (где ? мы будем пытаться разложить по $p_1(x)$ и $p_0(x)$).
?=2x-1/2
Теперь, зная ?, найдём коэффициент при $p_1(x)$. На этот раз это будет 4.
Тогда
2x-1/2=4*(x/2-1)+??=2x-4+??, ??=7/2.
Ну и получаем коэффициент разложения при $p_0(x)$ – 7/2.
В общем, алгоритм очень простой: подгоняем коэффициент при старшем многочлене, потом помладше, потом помладше и т.д.

Вот тут вы понимаете, почему нам важно, чтобы в СКОП были полиномы ВСЕХ СТЕПЕНЕЙ? Если бы не так, то наш алгоритм на «пропущенной» степени бы застопорился.

Боголюбов говорит, что 0) следует из того, что система «нормальная». Забейте на это прилагательное. Если вы понимаете алгоритм, приведённый выше – не берите в голову все эти эпитеты «нормальная», «замкнутая», «полная»…

1) Следствие 0), также Боголюбов его отдельно не выделяет.
Если $m<n$ и $q_m(x)$ – ЛЮБОЙ многочлен m-той степени, то

$$\int_a^b p_n(x) q_m(x) \rho(x) dx = 0$$

Т.е. если многочлен n-той степени решит встретиться с многочленом степени помладше, который не состоит в этой несчастной СКОП, то и тут жандарм выдаст 0. Всё-таки молодое поколение, даже не состоящее в этой СКОП, надо особенно оградить от этих $p_n(x)$. Не зря же им запрещают друг с другом общаться. А то понарассказывают они молодёжи, а они потом вдруг начнут Лёху смотреть… Нельзя такого допустить!
Доказывается очень просто через 0). Разложим x^m по свойству 0)

$$\sum_{k=0}^{m} C_k p_k(x)$$

И поменяем интеграл с суммой местами. Получим сумму m+1 интегралов, каждый из которых будет равен нулю в силу ортогональности полиномов разных степеней (или, как мы говорим, жандарм не разрешает контакты ☺)

$$\sum_{k=0}^{m} C_k \int_a^b p_m(x) p_k(x) \rho(x) dx = \overbrace{0 + 0 + \ldots + 0}^{m+1}$$

Свойство 1) доказано.

0) и 1) нам потребуется в дальнейших доказательствах.

2) Теорема о нулях. Любой многочлен из системы КОП содержит на [a..b] ровно n вещественных нулей.
(для сравнения – формулировка от Боголюбова):

Теорема 3.2.1 (Теорема о нулях). *КЛОП степени n содержит ровно n простых вещественных нулей строго на (a, b)*

Но я не устаю повторять: нельзя взять полином и сказать, что он классический ортогональный на [a..b]. Ортогональным он становится только, как говорил Доминик Торетто, в семье. Поэтому не просто КОП, а любой полином из системы КОП).
О сути теоремы: мы знаем, что у любого многочлена n-ной степени n нулей. Но, во-первых, они могут быть комплексными, во-вторых, выйти за рамки [a..b]. Эта теорема утверждает, что не будет ни того, ни другого.

Доказательство.
Возьмём многочлен $p_n(x)$, про который нам как раз нужно доказать, что у него n нулей [a..b] и… применим свойство ортогональности его с $p_0(x)$:

$$\int_a^b p_0(x)p_n(x)\rho(x)dx = 0,\ n \neq 0$$

$$p_0(x) = const \Rightarrow \int_a^b p_n(x)\rho(x)dx = 0$$

$p_0(x)$ – это многочлен нулевой степени, т.е. константа. Естественно, его можно вынести из-под интеграла.
Теперь присмотримся к $p_n(x)$. Хоть сколько-то у неё нулей есть? Вынесем, что наскребли:

$$p_n(x) = \underbrace{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_k)}_{r_k(x)}\underbrace{\varphi_n(x)}$$

Сразу же вопрос: а если мы нашли нуль, но за пределами [a..b], его включать в эрку или в фишку? Ответ: в фишку. А фишка тогда будет знакопостоянной функцией на [a..b] (или положительной при всех x на [a..b], или

отрицательной). Вне [a..b] она может и не быть знакопеременной, а вот внутри – знакопостоянной.
Нам нужно доказать, что k=n – чтобы наскребли n нужных нам нулей.
Предположим, что это не так.
Тогда возьмём $r_k(x)$ и $p_n(x)$… и поженим их! В качестве присутствующего третьего священника по традиции возьмём ρ(x), тогда

$$\int_a^b p_n(x) r_k(x) \rho(x) dx = \int_a^b \varphi(x) r_k^2(x) \rho(x) dx \neq 0 \qquad \left(\begin{array}{l}\text{т.к. выражение}\\ \text{под интегралом}\\ \text{не меняет знак}\end{array}\right)$$

А почему не меняет знак? r^2, понятно, положительна или ноль (причём тождественным нулём она, если посмотреть на её определение, быть не может), φ(x) на [a..b] знакопостояна (только что это обсудили), ну а ρ(x) должна быть знакопостоянной на [a..b], мы это проговаривали в определении СКОП. Значит, интеграл не равен нулю.
С другой стороны, k<n, смотрим на свойство 1) – жандарм, слышишь, ты обязан сказать, что вот этот не равный нулю интеграл – ноль…
Противоречие! 2) доказано.

{Дальнейший кусок текста писался, когда автор ещё не додумался выделить 1) в отдельное свойство. Если вы поняли 1) и его роль в доказательстве свойства 2) – пропустите дальнейший текст в фигурных скобках. Иначе читайте продолжение доказательства 2) без ссылки на 1):

С другой стороны, $r_k(x)$ и $p_n(x)$ – многочлены разных степеней, а раз так, то должно выполняться свойство ортогональности с весом ρ(x) и интеграл занулится! Противоречие, ура, победа! Небольшая проблема: $r_k(x)$ не входит в СКОП. Но её можно разложить по СКОП –

$$r_k(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i p_i(x)$$

См. как раз свойство 0).
Воспользуемся линейностью интеграла и как раз получим

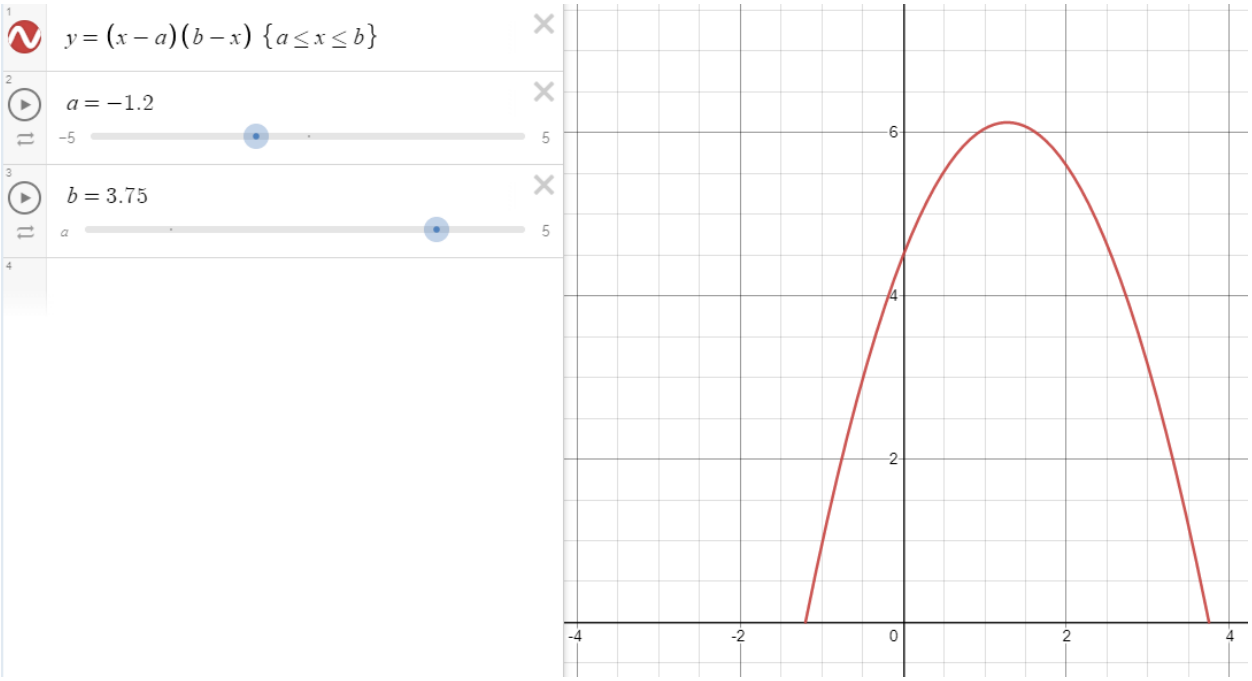
$$\int_a^b p_n(x)r_k(x)\rho(x)dx = \sum_{i=0}^{k} c_i \int_a^b p_n(x)p_i(x)\rho(x)dx = 0$$

Один интеграл с одной стороны, не ноль, с другой стороны, ноль. Противоречие. Значит, k=n}.

А вот для доказательства дальнейших свойств нам придётся поговорить про функцию ρ(x). Раньше она была произвольной, лишь бы только знакопостоянной на [a..b], но чтобы были верны последующие свойства, нам придётся наложить дополнительные условия.
Введём σ(x) – это совсем жёстко заданная функция, у него есть определение:

$$\sigma(x) = \begin{cases} (x-a)(b-x), & a \neq -\infty,\ b \neq +\infty \\ (x-a), & a \neq -\infty,\ b = +\infty \\ (b-x), & a = -\infty,\ b \neq +\infty \\ 1, & a = -\infty,\ b = +\infty \end{cases}$$

Например, при конечных a или b это просто кусок параболки:



Подстановкой легко убедиться, что σ(x), определённая таким образом, удовлетворяет условию

$\boxed{x^m\sigma(x)\rho(x)|_a^b = 0}$, при любом m. В дальнейшем это условие мы будем называть условие подстановки.

Так вот, эта σ(x) накладывает следующее условие: вот эта вот функция

$$\frac{(\sigma(x)\rho(x))'}{\rho(x)}$$

Должна быть линейной (причём не константой). Она обозначается τ(x).
Это условие называется уравнением Пирсона и, как правило, записывается чуть иначе:

$$\boxed{(\sigma(x)\rho(x))' = \tau(x)\rho(x)}$$

Кажется, что это очень искусственное условие, накладываемое на весовую функцию ρ(x) (то, что $\frac{(\sigma(x)\rho(x))'}{\rho(x)}$ должно быть линейной функцией) и непонятно, зачем оно. Сейчас поймём.

3) Если продифференцировать каждый полином из СКОП, мы вновь получим СКОП, но уже, ВОЗМОЖНО, с другим весом.
4) А как всё-таки найти эти самые ортогональные полиномы $p_n(x)$?
Оказывается, они являются решениями задачи ШЛλ:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(\sigma(x)\rho(x)\dfrac{dy}{dx}\right) + \lambda_n\rho(x)y(x) & x \in (a,b) \\ |y(a)| < \infty,\ |y(b)| < \infty & y \equiv p_n(x) \end{cases}$$

Я ещё раз напомню, в чём смысл ШЛλ и отвечаю на ваш вопль «а где взять лямбду». Однородный дифур второго порядка с граничными условиями, которыми удовлетворяет тривиальное решение, по умолчанию имеет его (и только его). Чтобы задача ШЛλ имело нетривиальное решение, лямбда была не абы какой, а заботливо нами подогнанной. Вспомните первую методу по ММФ: там лямбда была такой, чтобы от 0 до l уложить целое или полуцелое число длин волн.
Таких лямбд существует счётное число, и, как несложно понять, каждому СЗ λ_n соответствует СФ, которая как раз и будет $p_n(x)$.

Я не зря сформулировал 4), не доказав 3). Мы их сейчас докажем вместе, скопом. Причём мы как будто примемся доказывать 3), но мы «случайно»

докажем заодно ещё и 4). Причём, как вы понимаете, 4) нам поважнее будет. Мы потом сможем получить явные представления $p_n(x)$.

Итак, как говорил Ли-кей, леголеголего!
Начнём с того, что зададим m<n. Нам нужно доказать

$$\int_a^b p_n'(x)\, p_{m<}'(x)\rho(x)\sigma(x)dx = 0$$

Это наша цель. ρ(x)* σ(x) – новый вес.

Начнём с того, что

3. Интеграл

$$\int_a^b x^{m-1}p_n(x)\underbrace{\tau(x)\rho(x)}_{=(\sigma\rho)'}dx = 0$$

так как $x^{m-1}\tau(x)$ может быть представлен в виде

$$x^{m-1}\tau(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i p_i(x)$$

В общем, он равен нулю в силу свойства 1).
Нам нужно доказать 3). Для этого нужно родить под интегралом производные $p_n(x)$. Как это сделать? Проинтегрировать по частям!

$$0 = \int_a^b x^{m-1}p_n(x)\tau(x)\rho(x)dx = p_n(x)\underbrace{x^{m-1}\sigma(x)\rho(x)|_a^b}_{=0} -$$

$$-(m-1)\int_a^b x^{m-2}\sigma(x)p_n(x)\rho(x)dx - \int_a^b p_n'(x)x^{m-1}\rho(x)\sigma(x)dx$$

Теперь становится понятно, зачем нужно было такое странное определение σ(x): чтобы подстановка от a до b занулилась благодаря тому условию, которое я назвал условием подстановки!

$\boxed{x^m\sigma(x)\rho(x)|_a^b = 0}$, - вот оно.
Занулится не только это. x^{m-2} – многочлен степени ниже m и в силу 1), поженённый с КОП $p_n(x)$ и весом, тоже занулится. Выживает только третий

Но только вот он равен нулю – см. начало доказательства.

$$\int_a^b p_n'(x)x^{m-1}\rho(x)\sigma(x)dx = 0$$

Вот и новый вес появился - ρ(x)* σ(x). Кстати, если и a, и b бесконечность, то σ(x) тождественная единица, так что в этом случае вес остаётся тот же. Маленькая проблема: у нас всё-таки не p_m'(x), как нам хотелось бы, а x^{m-1}. Но это не беда. Т.к. m любое, лишь бы оно было меньше n, мы вправе записать это равенство

$$\int_a^b p_n'(x)x^{l}\rho(x)\sigma(x)dx = 0$$

Для всех l<m (или l<=m-1). После чего «собрать» p_m'(x) как сумму степеней икса от 0 до m-1, воспользоваться линейностью интеграла и получить

$$\int_a^b p_n'(x)\,p_m'(x)\,\rho(x)\sigma(x)dx = 0$$

Что нам и нужно было.

Удостоверимся, что новый вес удовлетворяет условию Пирсона:

$$(\sigma\rho_1)' = \sigma\rho_1' + \sigma'\rho_1 = \sigma(\sigma\rho)' + \sigma'\rho_1 = \sigma\tau\rho + \sigma'\rho_1 = (\tau+\sigma')\rho_1 = \tau_1(x)\rho_1(x)$$

Теперь перейдём к 4)! Наша цель – получить ШЛλ, уравнение Штурма-Лиувилля с лямбдой. Вернее, сначала мы его получим в недивергентной форме:

$$\boxed{\sigma(x)p_n''(x) + \tau(x)p_n'(x) + \lambda_n p_n(x) = 0}$$

Как же нам его получить? До этого нам в этой главе вообще дифуры не попадались…
Будем плясать от полученного результата:

$$\int_a^b p_n'(x)x^{m-1}\rho(x)\sigma(x)dx = 0$$

Был третью страницы выше.
Чуть его перепишем:

$$\int_a^b p_n'(x)(x^m)'\rho(x)\sigma(x)dx = 0$$

Затащим x^m под дифференциал:

$$\int_a^b p_n'(x)\,\rho(x)\sigma(x)d\,x^m = 0$$

И возьмём по частям:

$$p_n(x)\underbrace{x^m\sigma(x)\rho(x)|_a^b}_{=0} - \int_a^b x^m(\sigma\rho p_n'' + (\sigma\rho)'p_n')dx =$$

$$\int_a^b x^m(\sigma\rho p_n'' + \tau\rho p_n')dx = 0$$

(сперва мы воспользовались условием подстановки, а затем – уравнением Пирсона, которые позволяет заменить производную σ()*p() на τ()*p())
Оп-оп-опа, а вот σ()*p’’()+τ()*p’() – это то, что в недивергентном уравнении!
Боголюбов этот нужный нам кусок обозначил как $q_n(x)$. Это многочлен степени… давайте прикинем: у σ() степень не больше 2, у p’’() степень n-2. У τ() степень ровно 1 (как раз тут нам пригодится то, что она всё-таки не константа – степень 1, а не «не больше 1, у p’() степень n-1. В итоге получаем многочлен степени n.

$$\int_a^b p_m(x)q_n(x)\rho(x)dx = 0$$

Так, значит, многочлен из СКОП пришёл побеседовать с многочленом из внешнего мира… степенью больше! Жандарм вовсе не обязан давать ноль (ведь беседы с обитателями внешнего мира степенью старше разрешены), но сам многочлен $q_n(x)$ таков, что результат встречи 0 (правильнее будет

сказать – мы специально его породили таким, чтобы он нам ноль давал ☺. Наверное, он только РЕН-ТВ про инопланетян смотрит и молодёжи, а тем более живущей в антиутопии неинтересен. Блин, это же отличная тема для раскрытия темы «конфликт поколений», нафига нам на лит-ре Тургенева подсовывали?)

Разложим нашего старика $q_n(x)$ на многочлены из СКОП:

$$q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i p_i(x)$$

Подставляем в интеграл:

$$\sum_{i=0}^{n} c_1 \int_a^b p_m(x) p_i(x) \rho(x) dx = c_m \int_a^b p_m^2(x) \rho(x) dx = 0$$

Из-за ортогональности полиномов из СКОП из всей суммы выживет только одно слагаемое и оно будет вынуждено равняться нулю.

Интеграл нулю не может быть равен – помним про знакопостоянство веса-жандарма! c_m приходится самому обнулиться.

Помним, что m – любое неотрицательное целое число, меньшее m. Значит, в разложении $q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i p_i(x)$ занулятся все цешки, кроме последней, c_n. И тогда

$$q_n(x) = c_n p_n(x)$$

Вспоминаем определение старика $q_n(x)$ - это $\sigma p_n'' + \tau p_n'$. Переобозначая c_n как $-\lambda_n$, наконец-то ахахах дожили получаем ШЛλ:

$$\boxed{\sigma(x) p_n''(x) + \tau(x) p_n'(x) + \lambda_n p_n(x) = 0}$$

Его можно привести к дивергентному виду с помощью уравнения Пирсона:

$$\frac{d}{dx}\left(\sigma(x)\rho(x)\frac{dp_n}{dx}\right) + \lambda_n \rho(x) p_n(x) = 0$$

На сегодня всё. В следующий раз мы займёмся поиском СЗ и нахождением самих $p_n(x)$. Как вы понимаете, это задача нужная, важная, жандарму нужно досье на каждый многочлен из СКОП.

Ну и я постараюсь ещё про краевые условия рассказать и про их важность в ШЛλ.